Интегрально-разностные уравнения Винера — Хопфа

И. Ц. ГОХБЕРГ и И. А. ФЕЛЬДМАН (Кишинев, СССР)

В настоящей статье излагается теория интегрально-разностных уравнений вида

$$(0.1)\qquad \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j\varphi(t-\delta_j)+\int_0^{\infty} k(t-s)\varphi(s)\,ds=f(t)\qquad (0\leqq t<\infty)$$

и некоторых близких к ним. В уравнении (0.1) a_j $(j=0, \pm 1, \dots)$ — произвольные комплексные числа, δ_j $(j=0, \pm 1, \dots)$ — произвольные различные действительные числа, $k(t)$ $(-\infty<t<\infty)$ и $f(t)$ $(0<t<\infty)$ — заданные функции, а $\varphi(t)$ $(0<t<\infty)$ — искомая функция. Кроме того, в (0. 1) полагается, что при $\delta_j>0$ функция $\varphi(t-\delta_j)$ обращается в нуль на отрезке $0\leqq t\leqq \delta_j$.

Уравнение (0. 1) представляет собой обобщение как интегрального уравнения Винера—Хопфа так и его дискретного аналога. Если положить $a_j=0$ $(j\neq 0)$ и $\delta_0=0$, то уравнение (0. 1) совпадает с интегральным уравнением Винера—Хопфа; если $k(t)\equiv 0$ и $\delta_j=j$ $(j=0, \pm 1, \dots)$, то относительно вектор-функции $\tilde\varphi(t)=\{\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots\}$, где $\varphi_j(t) = \varphi(t+j-1)$ $(0\leqq t\leqq 1)$, уравнение (0. 1) является дискретным уравнением Винера—Хопфа с матрицей $\|a_{j-k}\|_{j,k=1}^{\infty}$.

В простейшем случае уравнение (0. 1) рассматривается в пространстве $L_p(0, \infty)$ $(1\leqq p\leqq \infty)$ при следующих ограничениях:

$$(0.2)\qquad \sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j|<\infty, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |k(t)|\,dt<\infty.$$

При этих ограничениях уравнение (0. 1) может быть записано в виде

$$\int_0^{\infty} \varphi(s)\,d\omega(t-s)=f(t)\qquad (0\leqq t<\infty),$$

где $\omega(t)$ $(-\infty<t<\infty)$ — функция ограниченной вариации без сингулярной компоненты (см. [1]). При ограничениях (0. 2) уравнению (0. 1) сопоставляется символ

$$(0.3)\qquad \mathscr{W}(\lambda) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j e^{i\delta_j\lambda}+\int_{-\infty}^{\infty} k(t)e^{i\lambda t}\,dt$$

Оказывается, что оператор W, определяемый уравнением (0. 1), обратим хотя бы с одной стороны в том и только том случае, когда

$$\inf_{-\infty<\lambda<\infty} |\mathscr{W}(\lambda)| > 0.$$

При выполнении этого условия можно определить два числа

$$\nu = \lim_{l\to\infty} \frac{1}{2l} [\arg a(\lambda)]_{-l}^{l}, \qquad n = \frac{1}{2\pi} [\arg (1 + a^{-1}(\lambda)\mathscr{K}(\lambda))]_{-\infty}^{\infty},$$

где

$$a(\lambda) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j e^{i\delta_j\lambda}, \qquad \mathscr{K}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} k(t) e^{i\lambda t}\, dt.$$

Характер обратимости оператора W определяется знаками чисел (индексов) ν и n следующим образом

$n \diagdown \nu$	$\nu>0$	$\nu=0$	$\nu<0$
$n>0$	Λ	Λ	Π
$n=0$	Λ	Δ	Π
$n<0$	Λ	Π	Π

Здесь Λ означает обратимость только слева, Π — обратимость только справа, а Δ — двустороннюю обратимость.

Эти результаты, изложенные во втором параграфе, представляют собой обобщение известных результатов М. Г. Крейна [2] об уравнениях Винера—Хопфа. В их доказательстве существенную роль играет теорема о факторизации функции вида (0. 3), установленная в первом параграфе.

В третьем параграфе эти результаты получены при более слабых ограничениях на символ $\mathscr{W}(\lambda)$. В частности, в случае пространства L_2 они получен для произвольного непрерывного символа. Здесь существенно используются теоретико-кольцевые методы.

Четвертый параграф посвящен нарным интегрально-разностным уравнениям и транспонированным к ним.

§ 1. Теорема о факторизации

Обозначим через $\mathfrak{A}$ банахову алгебру всех функций вида

$$\mathscr{W}(\lambda) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j e^{i\delta_j\lambda} + \int_{-\infty}^{\infty} k(t) e^{i\lambda t}\, dt, \tag{1.1}$$

где δ_j — произвольные различные действительные числа, a_j — произвольные комплексные числа, ряд из которых абсолютно сходится, а $k(t) \in L_1(-\infty, \infty)$. Норма элемента $\mathscr{W}(\lambda)$ в $\mathfrak{A}$ определяется равенством

$$\|\mathscr{W}(\lambda)\| = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j| + \int_{-\infty}^{\infty} |k(t)|\, dt,$$

а операции обычным образом.

Очевидно, алгебра $\mathfrak{A}$ содержит алгебру $\mathfrak{P}$ почти-периодическух финкций, разлагающихся в абсолютно сходящиеся ряды Фурье, и алгебру $\mathfrak{L}_0$ преобразований Фурье функций из $L_1(-\infty, \infty)$. Алгебра $\mathfrak{A}$ является прямой суммой своих подалгебр $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{L}_0$. Непосредственной проверкой устанавливается, что $\mathfrak{L}_0$ является идеалом алгебры $\mathfrak{A}$. Легко также устанавливается, что для любой пары функций $a(\lambda) \in \mathfrak{P}$ и $\mathscr{K}(\lambda) \in \mathfrak{L}_0$ выполняются соотношения

$$\inf_{-\infty<\lambda<\infty} |a(\lambda)+\mathscr{K}(\lambda)| \leqq \inf_{-\infty<\lambda<\infty} |a(\lambda)| \tag{1.2}$$

и

$$\sup_{-\infty<\lambda<\infty} |a(\lambda)+\mathscr{K}(\lambda)| \geqq \sup_{-\infty<\lambda<\infty} |a(\lambda)|. \tag{1.3}$$

Функцию $\mathscr{W}(\lambda) \in \mathfrak{A}$ назовем *невырожденной*, если

$$\inf_{-\infty<\lambda<\infty} |\mathscr{W}(\lambda)| > 0.$$

Из соотношения (1.2) вытекает, что, если функция $\mathscr{W}(\lambda) = a(\lambda) + \mathscr{K}(\lambda)$ $(a(\lambda) \in \mathfrak{P},\ \mathscr{K}(\lambda) \in \mathfrak{L}_0)$ является невырожденной, то невырожденной будет и её почти-периодическая компонента $a(\lambda)$.

Каждой невырожденной функции $\mathscr{W}(\lambda) = a(\lambda) + \mathscr{K}(\lambda) \in \mathfrak{A}$ сопоставим два числа $\nu(\mathscr{W})$ и $n(\mathscr{W})$, определенных равенствами

$$\nu(\mathscr{W}) = \lim_{l\to\infty} \frac{1}{2l} [\arg a(\lambda)]_{-l}^{l}, \qquad n(\mathscr{W}) = \frac{1}{2\pi} \left[\arg\left(1 + a^{-1}(\lambda)\,\mathscr{K}(\lambda)\right)\right]_{-\infty}^{\infty}.$$

Предел в первом равенстве существует в силу известного свойства почти-периодических функций (см. [3]). Вещественное число $\nu(\mathscr{W})$ и целое число $n(\mathscr{W})$ назовем *индексами* функции $\mathscr{W}(\lambda)$. Отметим, что индексы функции не меняются при её малых возмущениях.

Обозначим через $\mathfrak{A}_+ (\mathfrak{A}_-)$ — подалгебру алгебры $\mathfrak{A}$, состоящую из всех функций вида (1.1), для которых числа δ_j неотрицательны (неположительны), а функции $k(t)$ обращаются в нуль на отрицательной (положительной) полуоси. Очевидно, все функции из подалгебры $\mathfrak{A}_+ (\mathfrak{A}_-)$ допускают голоморфные продолжения в верхнюю (нижнюю) полуплоскость.

Легко видеть, что пересечение $\mathfrak{A}_+ \cap \mathfrak{L}_0 (\mathfrak{A}_- \cap \mathfrak{L}_0)$ является идеалом алгебры $\mathfrak{A}_+ (\mathfrak{A}_-)$.

Этот параграф посвящен доказательству следующего предложения.

Теорема 1. 1. *Всякая невырожденная функция* $\mathscr{W}(\lambda)\in\mathfrak{A}$ *допускает факторизацию вида*

$$\mathscr{W}(\lambda) = \mathscr{W}_-(\lambda)e^{i\nu\lambda}\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^n\mathscr{W}_+(\lambda) \qquad (-\infty<\lambda<\infty), \tag{1.4}$$

где

$$\mathscr{W}_\pm(\lambda),\quad \mathscr{W}_\pm^{-1}(\lambda)\in\mathfrak{A}_\pm;\quad \nu=\nu(\mathscr{W}) \quad и \quad n=n(\mathscr{W}).$$

Доказательство. Пусть $\mathscr{W}(\lambda) = a(\lambda)+\mathscr{K}(\lambda)\in\mathfrak{A}$ некоторая невырожденная функция. Тогда, как уже отмечалось, её почти-периодическая компонента $a(\lambda)$ также является невырожденной. Легко видеть, что индекс $\nu(b)$ почти периодической функции $b(\lambda)=e^{-i\nu\lambda}a(\lambda)$ равен нулю. Согласно известному обобщению теоремы Винера—Леви (см. [1]), функция $c(\lambda)=\ln b(\lambda)$ принадлежит алгебре $\mathfrak{P}$, т. е. функция $c(\lambda)$ имеет вид

$$c(\lambda) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j e^{i\gamma_j\lambda} \qquad \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}|c_j|<\infty\right),$$

где γ_j — различные вещественные числа.

Положим

$$c_+(\lambda) = \sum_{\gamma_j\geqq 0} c_j e^{i\gamma_j\lambda} \quad и \quad c_-(\lambda) = \sum_{\gamma_j<0} c_j e^{i\gamma_j\lambda}.$$

Тогда, очевидно,

$$a(\lambda) = a_-(\lambda)e^{i\nu\lambda}a_+(\lambda), \tag{1.5}$$

где $a_\pm(\lambda)=\exp c_\pm(\lambda)$, и стало быть, $a_\pm(\lambda)$, $a_\pm^{-1}(\lambda)\in\mathfrak{A}_\pm\cap\mathfrak{P}$. Так как функция $a^{-1}(\lambda)\,\mathscr{K}(\lambda)\in\mathfrak{L}_0$ и

$$1+a^{-1}(\lambda)\mathscr{K}(\lambda)\neq 0 \qquad (-\infty<\lambda<\infty),$$

то в силу известной теоремы М. Г. Крейна [2] о факторизации, функцию $1+a^{-1}(\lambda)\,\mathscr{K}(\lambda)$ можно представить в виде

$$1+a^{-1}(\lambda)\mathscr{K}(\lambda) = G_-(\lambda)\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^n G_+(\lambda) \qquad (-\infty<\lambda<\infty), \tag{1.6}$$

где функции $G_\pm(\lambda)$ и $G_\pm^{-1}(\lambda)$ принадлежат $\mathfrak{A}_\pm\cap\mathfrak{L}$. Здесь через $\mathfrak{L}$ обозначена алгебра, полученная из $\mathfrak{L}_0$ присоединением единицы.

Перемножая равенства (1. 5) и (1. 6) и объединяя множители с одним и тем же знаком в индексе, получим факторизацию (1. 4).

Теорема доказана.

Отметим, что функции $\mathscr{W}_\pm(\lambda)$ в факторизации (1. 4) определяются однозначно, с точностью до числового множителя.

§ 2. Интегрально-разностные операторы с абсолютно сходящимися символами

В настоящем параграфе излагается теория интегрально-разностных уравнений с абсолютно сходящимися символами.

1. *Интегрально-разностные операторы и их символы.* Обозначим через $\hat{\mathfrak{A}}$ множество всех операторов W, действующих в пространстве $L_p(0, \infty)$ по формуле

$$(W\varphi)(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \varphi(t-\delta_j) + \int_0^{\infty} k(t-s)\varphi(s)\, ds, \tag{2.1}$$

где δ_j — различные вещественные числа, a_j — комплексные числа, ряд из которых абсолютно сходится. Здесь, как и ранее, $\varphi(t-\delta_j) = 0$ при $t<\delta_j$. Легко видеть, что каждый оператор $W \in \hat{\mathfrak{A}}$ является линейным ограниченным оператором, причем

$$\|W\|_{L_p} \leqq \sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j| + \int_{-\infty}^{\infty} |k(t)|\, dt.$$

Как будет показано ниже, в последнем соотношении при $p=1$ достигается знак равенства.

Оператору $W \in \hat{\mathfrak{A}}$, определенному равенством (2.1), сопоставим функцию

$$\mathcal{W}(\lambda) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j e^{i\delta_j\lambda} + \int_{-\infty}^{\infty} k(t) e^{i\lambda t}\, dt \qquad (-\infty<\lambda<\infty), \tag{2.2}$$

которую назовем символом оператора W.

Между операторами W из множества $\hat{\mathfrak{A}}$ и их символами $\mathcal{W}(\lambda) \in \mathfrak{A}$, существует взаимно-однозначное соответствие. Оно, очевидно, является линейным, но не мультипликативным (более того, произведение операторов из $\hat{\mathfrak{A}}$ может не быть оператором из этого множества). Однако это соответствие является частично мультипликативным в следующем смысле: *если операторы $W_1, W_2, W_3 \in \hat{\mathfrak{A}}$ таковы, что их символы удовлетворяют условиям $\mathcal{W}_1(\lambda) \in \mathfrak{A}_-$, $\mathcal{W}_3(\lambda) \in \mathfrak{A}_+$, то оператор $W = W_1 W_2 W_3$ принадлежит $\hat{\mathfrak{A}}$ и для его символа имеет место равенство* $\mathcal{W}(\lambda) = \mathcal{W}_1(\lambda)\mathcal{W}_2(\lambda)\mathcal{W}_3(\lambda)$. Последнее утверждение проверяется без труда и на его доказательстве мы не будем останавливаться.

Из сказанного, в частности, следует, что множество $\hat{\mathfrak{A}}_+$ ($\hat{\mathfrak{A}}_-$), состоящее из всех операторов $W \in \hat{\mathfrak{A}}$ с символами $\mathcal{W}(\lambda) \in \mathfrak{A}_+(\mathfrak{A}_-)$, образуют коммутативную алгебру. В частности, если оператов $W \in \hat{\mathfrak{A}}_\pm$ и его символ $\mathcal{W}(\lambda)$ ($\in \hat{\mathfrak{A}}_\pm$) обладает свойством $\mathcal{W}^{-1}(\lambda) \in \mathfrak{A}_\pm$, то оператор W обратим и обратным к нему является оператор W^{-1} с символом $\mathcal{W}^{-1}(\lambda)$.

2. *Сведение общего случая к простейшему.* Обозначим через $U_\nu(\infty < \nu < \infty)$ линейный ограниченный оператор, определенный в пространстве $L_p(0, \infty)$ равенством

$$(U_\nu \varphi)(t) = \begin{cases} \varphi(t-\nu), \ \max(\nu, 0) < t < \infty, \\ 0, \ 0 \leqq t \leqq \max(\nu, 0). \end{cases}$$

Очевидно, $U_{-\nu} U_\nu = I$ для всех $\nu > 0$, а для разности $I - U_\nu U_{-\nu}$ имеет место равенство

$$(I - U_\nu U_{-\nu})\varphi(t) = \begin{cases} \varphi(t), & 0 \leqq t \leqq \nu \\ 0, & \nu < t < \infty. \end{cases}$$

Для всех вещественных ν оператор $U_\nu \in \hat{\mathfrak{A}}$ и его символом очевидно, является функция $\exp(i\nu\lambda)$.

Через $V^{(n)}(n = 0, \pm 1, \dots)$ обозначим оператор из $\hat{\mathfrak{A}}$, символ которого равен $(\lambda - i)^n / (\lambda + i)^n$. Без труда проверяется (см. [4]), что $V^{(n)} = V^n (n = 0, 1, \dots)$ и $V^{(n)} = (V^{(-1)})^{-n} (n = -1, -2, \dots)$, а операторы V и $V^{(n-)}$ определяются равенствами

$$(V\varphi)(t) = \varphi(t) - 2\int_0^t e^{s-t}\varphi(s)\,ds, \quad (V^{(-1)}\varphi)(t) = \varphi(t) - 2\int_t^\infty e^{t-s}\varphi(s)\,ds.$$

Как известно (см. например, [4]), для всех натуральных n оператор $V^{(n)}$ обратим слева: $V^{(-n)} V^{(n)} = I$. Подпространство $\mathfrak{E}_{p,n}$ значений оператора $V^{(n)}$ $(n > 0)$ совпадает с линейной замкнутой в пространстве $L_p(0, \infty)$ оболочкой функций $\Lambda(2t)e^{-t}$ $(j = n, n+1, \dots)$ где $\Lambda_j(t)$ — полиномы Лагера, а подпространство $\mathfrak{F}_n$ нулей оператора $V^{(-n)}$ $(n > 0)$ является линейной оболочкой функций $t^j e^{-t}$ $(j = 0, 1, \dots, n-1)$ и не зависит от p. Легко видеть, что уравнение $V^{(n)}\varphi = g (n > 0)$ разрешимо в $L_p(0, \infty)$ в том и только том случае, когда выполняются условия

$$\int_0^\infty g(t) t^j e^{-t}\,dt = 0 \qquad (j = 0, 1, \cdots, n-1).$$

Разность $P_n = I - V^{(n)} V^{(-n)}$ $(n > 0)$ является проектором, проектирующим пространство $L_p(0, \infty)$ на подпространство $\mathfrak{F}_n$ параллельно $\mathfrak{E}_{p,n}$. В пространстве L_2 $(0, \infty)$ проектор P_n $(n = 1, 2, \dots)$ ортогонален.

Для всех $\nu (0 \leqq \nu < \infty)$ и n $(n = 0, 1, \dots)$ операторы $U_\nu V^{(n)} (= V^{(n)} U_\nu)$, $U_{-\nu} V^{(-n)}$ $(= V^{(-n)} U_{-\nu})$, $U_{-\nu} V^{(n)}$, $V^{(-n)} U_\nu$ принадлежат*) множеству $\hat{\mathfrak{A}}$. Очевидно, символами этих простейших интегрально-разностных операторов являются соответственно функции

$$e^{i\nu\lambda}\left(\frac{\lambda - i}{\lambda + i}\right)^n, \quad e^{-i\nu\lambda}\left(\frac{\lambda - i}{\lambda + i}\right)^{-n}, \quad e^{-i\nu\lambda}\left(\frac{\lambda - i}{\lambda + i}\right)^n, \quad e^{i\nu\lambda}\left(\frac{\lambda - i}{\lambda + i}\right)^{-n}.$$

---

*) Отметим, что операторы $U_\nu V^{(-n)}$ и $V^{(n)} U_{-\nu}$ не принадлежат множеству $\hat{\mathfrak{A}}$.

Пусть символ $\mathscr{W}(\lambda)$ оператора $W \in \hat{\mathfrak{A}}$ является невырожденным и равенство (1. 4) дает факторизацию функции $\mathscr{W}(\lambda)$. Тогда, в силу сказанного в конце ервого пункта, оператор W можно представить в виде

$$W = W_- U_\nu V^{(n)} W_+ \tag{2. 2}$$

при $\nu \leqq 0$, и в виде

$$W = W_- V^{(n)} U_\nu W_+ \tag{2. 3}$$

ри $\nu \geqq 0$, где $W_\pm$ — операторы из $\hat{\mathfrak{A}}_\pm$ с символами, соответственно равными $\mathscr{W}_\pm(\lambda)$; $\nu = \nu(\mathscr{W})$, $n = n(\mathscr{W})$.

Так как операторы $W_\pm$ обратимы и обратными к ним являются операторы $W_\pm^{-1} \in \hat{\mathfrak{A}}_\pm$ с символами $\mathscr{W}_\pm^{-1}(\lambda)$, то вопрос о характере обратимости оператора W сводится к исследованию одного из простейших операторов $U_\nu V^{(n)}$ при $\nu \leqq 0$ и $V^{(n)} U_\nu$ при $\nu > 0$.

3. *Случай* $\nu > 0$. В этом пункте и в последующих двух предполагается ледующее: $W(\in \hat{\mathfrak{A}})$ — оператор с невырожденным символом $\mathscr{W}(\lambda)$, равенство 1. 4) дает факторизацию символа $\mathscr{W}(\lambda)$, $W_\pm$ — операторы из $\hat{\mathfrak{A}}_\pm$ с символами $\mathscr{W}_\pm(\lambda)$, числа $\nu(\mathscr{W})$ и $n(\mathscr{W})$ для краткости обозначим через ν и n.

Теорема 2. 1. *Если $\nu > 0$, то оператор W обратим слева. Для того чтобы уравнение*

$$W\varphi = g \tag{2. 4}$$

было разрешимо, необходимо и достаточно, чтобы

а) *при $n \geqq 0$ функция $W_-^{-1} g$ обращалась в нуль на отрезке* $[0, \nu]$ *и выполнялось словие*

$$\int_0^\infty (W_-^{-1} g)(t)\, t^k e^{-t}\, dt = 0 \qquad (k = 0, 1, \cdots, n-1), \tag{2. 5}$$

б) *при $n < 0$ функция $V^{(-n)} W_-^{-1} g$ совпадала на отрезке* $[0, \nu]$ *с некоторой линейной комбинацией функций $t^j e^{-t}$* $(j = 0, 1, \ldots, n-1)$..

Доказательство. Как уже отмечалось в предыдущем пункте, исследование обратимости оператора W сводится к исследованию оператора $V^{(n)} U_\nu$. Если $n \geqq 0$, то оператор $U_{-\nu} V^{(-n)} (\in \hat{\mathfrak{A}})$ является обратным слева к оператору $V^{(n)} U_\nu$. При $n < 0$ и $\nu > 0$ будем иметь

$$U_{-\nu} V^{(-n)} V^{(n)} U_\nu = I - U_{-\nu} P_{-n} U_\nu, \tag{2. 6}$$

где $P_m = I - V^{(m)} V^{(-m)}$ $(m = 1, 2, \ldots)$ — конечномерный проектор, проектирующий пространство L_p на подпространство с базисом $t^j e^{-t}$ $(j = 0, 1, \ldots, m-1)$ (см. п. 2.). В пространстве L_2 оператор P_m является ортогональным проектором.

Так как множества значений операторов U_ν и P_{-n} пересекаются только в нуле, то в случае пространства L_2 оператор $U_{-\nu}P_{-n}U_\nu$ имеет норму, меньшую единицы, и следовательно, оператор $I-U_{-\nu}P_{-n}U_\nu$ обратим, причем

$$(I-U_{-\nu}P_{-n}U_\nu)^{-1}=\sum_{j=0}^{\infty}(U_{-\nu}P_{-n}U_\nu)^j. \tag{2. 7}$$

Так как оператор $I-U_{-\nu}P_{-n}U_\nu$ в любом пространстве L_p $(1\leqq p\leqq\infty)$ может аннулировать лишь линейные комбинации функций t^je^{-t} $(j=0, 1, \ldots, -n-1)$, которые принадлежат L_2, то он действует взаимно однозначно во всех пространствах L_p. В силу конечномерности проектора P_{-n} оператор $I-U_{-\nu}P_{-n}U_\nu$ обратим во всех пространствах L_p. Легко видеть что ряд в правой части равенства (2. 7) сходится по норме в любом пространстве L_p и стало быть, равенство (2. 7) сохраняет силу во всех пространствах L_p $(1\leqq p\leqq\infty)$.

Учитывая равенство (2. 6), получим что оператор $V^{(n)}U_\nu$ обратим только слева и обратный слева к нему имеет вид

$$(I-U_{-\nu}P_{-n}U_\nu)^{-1}U_{-\nu}V^{(-n)}.$$

Перейдем теперь к нахождению условий разрешимости уравнения (2. 4), которое может быть записано в виде

$$V^{(n)}U_\nu W_+\varphi=W_-^{-1}g. \tag{2. 8}$$

При $n\geqq 0$ операторы $V^{(n)}$ и U_ν коммутируют. Поэтому в этом случае для разрешимости уравнения (2. 8), необходимо чтобы функция $W_-^{-1}g$ принадлежала пересечению множеств значений операторов $V^{(n)}$ и U_ν. Последнее эквивалентно выполнению условий *a)*.

Пусть обратно функция $W_-^{-1}g$ принадлежит множествам значений операторов $V^{(n)}$ и U_ν и $\psi=U_{-\nu}\ W_-^{-1}g$ — единственное решение уравнения $U_\nu\psi=W_-^{-1}g$. Покажем, что функция $\psi(t)$ принадлежит множеству значений оператора $V^{(n)}$. Действительно, обозначая функцию $(W_-^{-1}g)(t)$ через $\chi(t)$, получим

$$\int_0^\infty\psi(t)t^je^{-t}\,dt=\int_0^\infty(U_{-\nu}\chi)(t)t^je^{-t}\,dt=$$

$$=\int_0^\infty\chi(t+\nu)t^je^{-t}\,dt=\int_\nu^\infty\chi(t)(t-\nu)^je^{-t+\nu}\,dt=$$

$$=\int_0^\infty\chi(t)(t-\nu)^je^{-t+\nu}\,dt=0\qquad(j=0, 1, \cdots, n-1).$$

Таким образом, уравнение $U_\nu V^{(n)}\varphi=W_-^{-1}g$ разрешимо, а следовательно разрешимо и уравнение (2. 8).

Пусть теперь $n<0$. Если функция $\varphi \in L_p(0, \infty)$ является решением уравнение (2. 8), то

(2. 9) $$U_\nu W_+ \varphi = V^{(-n)} W_-^{-1} g - f,$$

где

$$f = (V^{(-n)} V^{(n)} - I) U_\nu W_+ \varphi.$$

Легко видеть, что функция $f(t)$ имеет вид

(2. 10) $$f(t) = \sum_{j=0}^{-n-1} c_j t^j e^{-t},$$

где коэффициенты c_j таковы, что

(2. 11) $$(V^{(-n)} W_-^{-1} g)(t) = f(t) \qquad (0 \leqq t \leqq \nu).$$

Обратно, пусть условие *б)* выполнено, и числа c_j подобраны так чтобы для функции (2. 10) выполнялось (2. 11). Тогда уравнение (2. 9) разрешимо и его решение, очевидно, является и решением уравнения (2. 8).

Теорема доказана.

В рассматриваемом в этом пункте случае $\nu>0$, оператор W допускает представление

$$W = W_- V^{(n)} U_\nu W_+$$

Оператор $W^{(-1)}$, обратный к W слева, задается формулой

$$W^{(-1)} = W_+^{-1} V^{(-n)} U_{-\nu} W_-^{-1} \text{ при } n \geqq 0$$

и формулой

$$W^{(-1)} = W_+^{-1} (I - U_{-\nu} P_{-n} U_\nu)^{-1} U_{-\nu} V^{(-n)} W_-^{-1} \quad \text{при} \quad n<0.$$

Оператор $(I - U_{-\nu} P_{-n} U_\nu)^{-1}$ может быть получен по формуле

$$(I - U_{-\nu} P_{-n} U_\nu)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (U_{-\nu} P_{-n} U_\nu)^j,$$

где ряд сходится по норме операторов*).

4. *Случай* $\nu<0$.

Теорема 2. 2. *Если* $\nu<0$, *то оператор* W *обратим справа. Всякое решение* $\varphi(t) \in L_p(0, \infty)$ *однородного уравнения*

(2. 12) $$W\varphi = 0$$

а) *при* $n \geqq 0$ *имеет вид*

(2. 13) $$\varphi = W_+^{-1} V^{(-n)} g,$$

*) Оператор $(I - U_{-\nu} P_{-n} U_\nu)^{-1}$ можно также найти как оператор, обратный к оператору Фредгольма с вырожденным ядром.

где $g(t)$ — *произвольная функция из* $L_p(0, \infty)$, *удовлетворяющая условиям*

$$(2.14)\quad g(t)=0 \quad (t>-\nu); \quad \int_0^\infty g(t)t^j e^{-t}\,dt = 0 \qquad (j=0, 1, \cdots, n-1)$$

б) *при* $n<0$ *имеет вид*

$$\varphi = W_+^{-1}\left(g(t)+\sum_{j=0}^{-n-1} c_j t^j e^{-t}\right),$$

где $g(t)$ — *произвольная функция из* L_p $(0, \infty)$, *равная нулю при* $-\nu \leqq t<\infty$, *а* c_j — *произвольные комплексные числа.*

Доказательство. Пользуясь соображениями из доказательства предыдущей теоремы легко вывести, что оператор $W^{(-1)}$, определенный равенством

$$W^{(-1)} = W_+^{-1}V^{(-n)}U_{-\nu}W_-^{-1} \quad \text{при} \quad n\leqq 0$$

и равенством

$$W^{(-1)} = W_+^{-1}V^{(-n)}U_{-\nu}(I-U_\nu P_n U_{-\nu})^{-1}W_-^{-1} \quad \text{при} \quad n>0,$$

является обратным справа к оператору W.

Уравнение (2. 12) эквивалентно следующему

$$(2.15)\qquad U_\nu V^{(n)} W_+\varphi = 0.$$

В случае $n\geqq 0$, очевидно, что всякая функция вида (2. 13) является решением уравнения (2. 15). Обратно, пусть $\varphi(t)$ — решение уравнения (2. 15). Тогда функция $g=V^{(n)}W_+\varphi$ удовлетворяет условиям (2. 14) и φ выражается через неё равенством $\varphi=W_+^{-1}V^{(-n)}g$.

В случае $n<0$ операторы U_ν и $V^{(n)}$ коммутируют и поэтому всякая функция вида $\varphi=W_+^{-1}\psi$, где ψ принадлежит прямой сумме подпространства нулей U_ν и $V^{(n)}$, является решением уравнения (2. 15).

Пусть $\varphi(t)$ — решение уравнения (2. 15). Тогда функция $\psi=U_\nu W_+\varphi$ является линейной комбинацией функций $t^j e^{-t}$ $(j=0, 1, \ldots, n-1)$ и, следовательно, $W_+\varphi = U_{-\nu}\psi+b(t)$, где $b(t)=0$, при $t>-\nu$. Кроме того, легко видеть, что функция $U_{-\nu}\psi$ представима в виде суммы двух функций, одна из которых есть линейная комбинация функций $t^j e^{-t}$, а вторая равна нулю при $t>-\nu$ Этим завершается доказательство теоремы.

5. *Случай* $\nu=0$. Приводимая ниже теорема является обобщением известных результатов М. Г. Крейна (см. [2]) об уравнениях Винера—Хопфа.

Теорема 2. 3. *Если* $\nu=0$, *то*

а) *при* $n=0$ *оператор* W *обратим, причем* $W^{-1}=W_+^{-1}W_-^{-1}$;

б) *при* $n>0$ *оператор* $W^{(-1)}=W_+^{-1}V^{(-n)}W_-^{-1}$ *является обратным слева к оператору* W; *уравнение* (2. 4) *разрешимо в том и только в том случае, когда выполнено условие* (2. 5);

в) *при* $n<0$ *оператор* $W^{(-1)}=W_+^{-1}V^{(-n)}W_-^{-1}$ *является обратным справа к оператору* W; *общее решение однородного уравнения* (2. 12) *дается равенством*

$$\varphi = W_+^{-1}\left(\sum_{j=0}^{-n-1} c_j t^j e^{-t}\right),$$

где c_j — *произвольные комплексные числа.*

Доказательства предыдущих теорем по существу остаются в силе и для рассматриваемого здесь случая.

6. *Необходимость условия невырождения.*

Теорема 2. 4. *Для того чтобы оператор* $W\in\hat{\mathfrak{A}}$ *был обратим в пространстве* $L_p(0,\infty)$ $(1\leqq p\leqq\infty)$ *хотя бы с одной стороны, необходимо и достаточно, чтобы его символ* $\mathscr{W}(\lambda)$ *был невырожденным.*

Если символ $\mathscr{W}(\lambda)$ *вырождается, то оператор* W *не является ни* Φ_+- *ни* Φ_--*оператором**).

Доказательство. Достаточность условий теоремы уже была установлена в предыдущих теоремах.

Пусть символ $\mathscr{W}(\lambda)$ оператора $W(\in\hat{\mathfrak{A}})$ вырождается. Легко видеть, что в любой окрестности оператора W найдется оператор $W_1\in\hat{\mathfrak{A}}$, символ которого имеет вид $\mathscr{W}_1(\lambda)=a_1(\lambda)+\mathscr{K}_1(\lambda)$, где $a_1(\lambda)$ $(\in\mathfrak{P})$ — почти-периодический полином

$$a_1(\lambda)=\sum_{j=1}^{m} c_j e^{i\gamma_j\lambda},$$

$\mathscr{K}_1(\lambda)$ $(\in\mathfrak{L}_0)$ — рациональная функция, причем в некоторой точке λ_0 вещественной оси $\mathscr{W}_1(\lambda_0)=0$.

Рассмотрим функцию

$$\mathscr{W}_2^{\pm}(\lambda)=\mathscr{W}_1(\lambda)\frac{\lambda\pm i}{\lambda-\lambda_0}. \tag{2.16}$$

Её можно представить в виде

$$\mathscr{W}_2^{\pm}(\lambda)=\mathscr{W}_1(\lambda)+(\lambda_0\pm i)\left(\frac{a_1(\lambda)-a_1(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0}+\frac{\mathscr{K}_1(\lambda)-\mathscr{K}_1(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0}\right).$$

*) Линейный ограниченный оператор А, действующий в банаховом пространстве $\mathfrak{B}$ называется Φ_+-(Φ_--) оператором, если множество его значений замкнуто и подпространство решений уравнения $Ax=0$ ($A^*f=0$; $f\in\mathfrak{B}^*$) конечномерно.

Функция $(\mathcal{K}_1(\lambda) - \mathcal{K}_1(\lambda_0))/(\lambda - \lambda_0)$ принадлежит $\mathfrak{L}_0$, а функция $(a_1(\lambda) - a_1(\lambda_0))/(\lambda - \lambda_0)$ является линейной комбинацией функций вида

$$\frac{e^{i\gamma\lambda} - e^{i\gamma\lambda_0}}{\lambda - \lambda_0} = i \int_0^\gamma e^{i\lambda_0(\gamma - t)} e^{i\lambda t}\, dt,$$

которые, очевидно, также принадлежат $\mathfrak{L}_0$. Таким образом, $\mathcal{W}_2(\lambda) \in \mathfrak{A}$. Так как $(\lambda - \lambda_0)/(\lambda \pm i) \in \mathfrak{A}_\pm$, то из равенства (2.16) вытекает, что оператор W_1 представим в виде

$$W_1 = B_- W_2^-, \quad W_1 = W_2^+ B_+, \tag{2.17}$$

где $W_2^\pm$ и $B_\pm$ операторы из $\hat{\mathfrak{A}}$ с символами, равными соответственно $\mathcal{W}_2^\pm(\lambda)$ и $(\lambda - \lambda_0)/(\lambda \pm i)$.

Допустим, что оператор W обратим с какой-либо стороны, тогда с той же стороны обратим оператор W_1. Отсюда в силу равенства (2.17) вытекает, что по крайней мере один из операторов B_+, B_- обратим с какой-либо стороны, а последнее противоречит установленному в [4].

Аналогично, если допустить, что оператор W является Φ_+- или Φ_--оператором, то получим (см. [5] стр. 90), что таковым является оператор W_1. Из равенств (2.17) в силу одного преложения из [6] следует, что один из операторов B_+ или B_- является Φ_+- или Φ_--оператором. Последнее невозможно (см. [7]).

Теорема доказана.

§ 3. Интегрально-разностные операторы с непрерывными символами

В этом параграфе результаты предыдущего параграфа распостраняются на более широкий (в некотором смысле максимальный) класс интегрально-разностных операторов Винера—Хопфа.

1. *Оценка нормы интегрально-разностных операторов.* Как уже отмечалось в § 2, для любого оператора $W \in \hat{\mathfrak{A}}$, действующего в пространстве $L_p(0, \infty)$ $(1 \leqq p \leqq \infty)$ по правилу

$$(W\varphi)(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \varphi(t - \delta_j) + \int_0^\infty k(t-s)\varphi(s)\, ds, \tag{3.1}$$

имеет место оценка

$$\|W\|_p \leqq \sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j| + \int_{-\infty}^{\infty} |k(t)|\, dt,$$

где через $\|W\|_p$ обозначается норма оператора W в пространстве L_p $(0, \infty)$.

Лемма 3. 1. *Пусть оператор* W *из* $\hat{\mathfrak{A}}$ *имеет вид* (3. 1) *и* $\mathscr{W}(\lambda)\in\mathfrak{A}$ — *его символ. Тогда имеет место оценка*

(3. 2)
$$\sup_{-\infty<\lambda<\infty}|\mathscr{W}(\lambda)| \leqq \|W\|_p \qquad (1\leqq p\leqq\infty),$$

причем

(3. 3)
$$\|W\|_1 = \sum_{j=-\infty}^{\infty}|a_j| + \int_{-\infty}^{\infty}|k(t)|\,dt, \quad \|W\|_2 = \sup_{-\infty<\lambda<\infty}|\mathscr{W}(\lambda)|.$$

Для спектрального радиуса r_w *оператора* W *в любом пространстве* $L_p(0, \infty)$ $(1\leqq p\leqq\infty)$ *имеет место равенство*

(3. 4)
$$r_w = \sup_{-\infty<\lambda<\infty}|\mathscr{W}(\lambda)|.$$

Доказательство. Пусть ε — произвольное положительное число. Подберем вещественное число λ_0 так чтобы

$$|\mathscr{W}(\lambda_0)| > \sup_{-\infty<\lambda<\infty}|\mathscr{W}(\lambda)|-\varepsilon.$$

Так как символ оператора $W-\mathscr{W}(\lambda_0)I$ обращается в нуль в точке λ_0, то в силу теоремы 2. 4 этот оператор необратим в L_p $(0, \infty)$ $(1\leqq p\leqq\infty)$. Следовательно,

$$r_w\geqq|\mathscr{W}(\lambda_0)|.$$

Учитывая произвольность ε получаем

(3. 5)
$$(\|W\|_p\geqq)\,r_w \geqq \sup_{-\infty<\lambda<\infty}|\mathscr{W}(\lambda)|.$$

Для всех чисел μ, удовлетворяющих условию $\mu>\sup|\mathscr{W}(\lambda)|$ оператор $W-\mu I$ обратим. Действительно, в рассматриваемом случае будем иметь

$$\inf_{-\infty<\lambda<\infty}|\mathscr{W}(\lambda)-\mu| > 0$$

и

$$\sup_{-\infty<\lambda<\infty}|a(\lambda)| \leqq \sup_{-\infty<\lambda<\infty}|\mathscr{W}(\lambda)| < |\mu|.$$

Из последнего соотношения вытекает, что $\nu(\mathscr{W}(\lambda)-\mu) = \nu(a(\lambda)-\mu) = 0$. Так как целое число

$$n(\mathscr{W}(\lambda)-\mu) = \frac{1}{2\pi}\left[\arg\left(1+(a(\lambda)-\mu)^{-1}\mathscr{K}(\lambda)\right)\right]_{-\infty}^{\infty}$$

непрерывно зависит от μ и при больших значениях μ оно равно нулю, то и для всех рассматриваемых μ оно равно нулю. В силу теоремы 2. 3 оператор $W-\mu I$ обратим. Таким образом, $r_w\leqq\sup|\mathscr{W}(\lambda)|$. Вместе с соотношением (3. 5) это означает равенство (3. 4).

Рассмотрим оператор $\tilde{W}$, определенный в пространстве $L_2\ (-\infty, \infty)$ равенством

$$(\tilde{W}\varphi)(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \varphi(t-\delta_j) + \int_{-\infty}^{\infty} k(t-s)\varphi(s)\,ds \qquad (-\infty < t < \infty).$$

Легко видеть, что

$$\|\tilde{W}\|_2 = \sup_{-\infty<\lambda<\infty} |\mathcal{W}(\lambda)|.$$

Так как

$$\|W\|_2 = \|P\tilde{W}P\|_2,$$

где P — ортопроектор, действующий в $L_2\ (-\infty, \infty)$ по правилу

$$(P\varphi)(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t>0 \\ 0, & t<0, \end{cases}$$

то

$$\|W\|_2 \leqq \|\tilde{W}\|_2.$$

Таким образом, доказано второе из равенств (3. 3). Первое из равенств (3. 3) получается из легко доказываемого соотношения

$$\lim_{n\to\infty} \|W\varphi_n\|_1 \geqq \sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j| + \int_{-\infty}^{\infty} |k(t)|\,dt,$$

где

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} n, & 0 \leqq t \leqq 1/n \\ 0, & 1/n < t < \infty \end{cases} \qquad (n = 1, 2, \cdots).$$

Лемма доказана.

Лемма 3. 2. *Пусть* W_1, $W_2 (\in \hat{\mathfrak{A}})$ *— операторы с символами* $\mathcal{W}_1(\lambda)$, $\mathcal{W}_2(\lambda)$ *и* $W (\in \hat{\mathfrak{A}})$ *— оператор с символом* $\mathcal{W}(\lambda) = \mathcal{W}_1(\lambda)\,\mathcal{W}_2(\lambda)$. *Тогда*

$$\|W\|_p \leqq \|W_1\|_p \|W_2\|_p \qquad (1 \leqq p \leqq \infty). \tag{3. 6}$$

Доказательство. Очевидно, без ограничения общности можно считать, что операторы W_1 и W_2 имеют вид

$$(W_m\varphi)(t) = \sum_{j=1}^{l} a_j^{(m)} \varphi(t-\delta_j^{(m)}) + \int_0^{\infty} k_m(t-s)\varphi(s)\,ds \qquad (m = 1, 2),$$

где $k_m(t)$ — финитные функции из $L_1\ (-\infty, \infty)$. В этом предположении, легко доказывается, что при достаточно большом δ будет иеть место равенство

$$W = U_{-\delta} W_1 W_2 U_\delta,$$

откуда вытекает соотношение (3. 6).

Лемма 3. 3. *Пусть оператор* $W \in \hat{\mathfrak{A}}$ *представлен в виде*

$$(W\varphi)(t) = \int_0^\infty \varphi(s)\, d\omega(t-s),$$

где $\omega(t)$ — *функция ограниченной вариации без сингулярной компоненты. Тогда в любом пространстве* $L_p(0, \infty)$ $(1 \leqq p \leqq \infty)$ *сопряженный оператор* W^* *имеет вид*

$$(W^*\varphi)(t) = \int_0^\infty \varphi(s)\, \overline{d\omega(s-t)}$$

и

(3. 7) $$\|W\|_p = \|W^*\|_p.$$

Доказательство. Первое утверждение леммы проверяется без труда. Для доказательства второго утверждения введем операторы

$$(S_\tau\varphi)(t) = \begin{cases} \varphi(\tau - t), & 0 < t < \tau \\ \varphi(t), & \tau < t < \infty \end{cases}; \quad (P_\tau\varphi)(t) = \begin{cases} \varphi(t), & 0 < t < \tau \\ 0, & \tau < t < \infty \end{cases} \quad (0 < \tau < \infty).$$

Оператор S_τ обратим, изометричен и $S_\tau^{-1} = S_\tau$, а P_τ является проектором с единичной нормой.

Непосредственно проверяется следующее равенство

(3. 8) $$P_\tau W' P_\tau = S_\tau P_\tau W P_\tau S_\tau,$$

где W' — оператор, транспонированный к W, т. е.

$$(W'\varphi)(t) = \int_0^\infty \varphi(s)\, d\omega(s-t).$$

Так как $\overline{W'\varphi(t)} = (W^*\bar{\varphi})(t)$, то

(3. 9) $$\|P_\tau W' P_\tau\|_p = \|P_\tau W^* P_\tau\|_p.$$

Из равенств (3. 8) и (3. 9) следует равенство

$$\|P_\tau W^* P_\tau\|_p = \|P_\tau W P_\tau\|_p,$$

которое вместе с соотношением

$$\|W\|_p \leqq \varliminf_{\tau \to \infty} \|P_\tau W P_\tau\|_p$$

влечет (3. 7).

2. *Операторы с непрерывными символами.* Обозначим через $\hat{\mathfrak{A}}_p$ замыкание по операторной норме в L_p (0, ∞) $(1 \leqq p \leqq \infty)$ множества $\hat{\mathfrak{A}}$. Пусть A — произвольный оператор из $\hat{\mathfrak{A}}_p$ и W_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — последовательность из $\mathfrak{A}$, сходящаяся к оператору A. В силу соотношений (3. 2) и (1. 3) последовательность функций $\mathcal{W}_n(\lambda) = a_n(\lambda) + \mathcal{K}_n(\lambda)$ из $\mathfrak{A}$ такова, что последовательность $a_n(\lambda)$

($n=1, 2, \ldots$) равномерно сходится к некоторой почти-периодической функции $a(\lambda)$, а последовательность $\mathscr{K}_n(\lambda)$ ($n=1, 2, \ldots$) — к некоторой непрерывной функции $\mathscr{K}(\lambda)$, стремящейся к нулю при $\lambda \to \pm\infty$. Легко видеть, что функция $\mathscr{A}(\lambda) = a(\lambda) + \mathscr{K}(\lambda)$ не зависит от выбора последовательности $W_n \in \hat{\mathfrak{A}}$, сходящейся к оператору A. Таким образом, каждому оператору $A \in \hat{\mathfrak{A}}_p$ сопоставляется непрерывная функция $\mathscr{A}(\lambda)$, которую будем называть **символом** оператора A. Легко видеть, что $\hat{\mathfrak{A}}_1 = \hat{\mathfrak{A}}$. Из соотношения (3.2) вытекает, что для любого оператора $A \in \hat{\mathfrak{A}}_p$ имеет место оценка

$$\sup_{-\infty<\lambda<\infty} |\mathscr{A}(\lambda)| \leqq \|A\|_p,$$

а при $p=2$ из (3. 3) вытекает равенство

$$\|A\|_2 = \sup_{-\infty<\lambda<\infty} |\mathscr{A}(\lambda)|. \tag{3.10}$$

Легко видеть, что $\hat{\mathfrak{A}}_{p_1} \subseteqq \hat{\mathfrak{A}}_{p_2}$ при $1 \leqq p_1 \leqq p_2 \leqq 2$ и если $A \in \hat{\mathfrak{A}}_{p_1}$, то $\|A\|_{p_1} \geqq \|A\|_{p_2}$. Из леммы 3. 3 следует, что $\hat{\mathfrak{A}}_p = \hat{\mathfrak{A}}_q$ ($p^{-1}+q^{-1} = 1$) и $\|A\|_p = \|A^*\|_p$ ($A \in \hat{\mathfrak{A}}_p$).

Обозначим через $\mathfrak{A}_p$ множество символов всех операторов из $\hat{\mathfrak{A}}_p$. *Соответствие между операторами из $\hat{\mathfrak{A}}_p$ и их символами из $\mathfrak{A}_p$ взаимно однозначно.* Действительно, допустим, что ненулевому оператору $A \in \hat{\mathfrak{A}}_p$ соответствует символ, равный тождественно нулю. Пусть последовательность $W_n \in \hat{\mathfrak{A}}$ сходится к оператору A по норме L_p. Последовательность W_n в силу (3. 2) и (3. 3) фундаментальна по операторной норме L_2 и, следовательно, сходится по этой норме к некоторому оператору B. На пересечении $L_2 \cap L_p$ операторы A и B совпадают и, следовательно, $B \neq 0$. Оператору B соответствует символ равный тождественно нулю, что противоречит равенству (3. 10).

3. *Максимальные идеалы алгебры* $\mathfrak{A}$.

Теорема 3. 1. *Множество M_{λ_0} всех функций из $\mathfrak{A}$, обращающихся в нуль в точке λ_0 ($-\infty<\lambda<\infty$), образует максимальный идеал алгебры $\mathfrak{A}$. Прямая сумма $M_{\mathfrak{P}} \dotplus \mathfrak{L}_0$, где $M_{\mathfrak{P}}$ — любой максимальный идеал алгебры $\mathfrak{P}$, также образует максимальный идеал алгебры $\mathfrak{A}$. Идеалами указанный двух типов исчерпываются все максимальные идеалы алгебры $\mathfrak{A}$.*

Доказательство. Легко проверяется, что M_{λ_0} и $M_{\mathfrak{P}} \dotplus \mathfrak{L}_0$ являются максимальными идеалами алгебры $\mathfrak{A}$. Пусть теперь M — некоторый максимальный идеал алгебры $\mathfrak{A}$ и $M_1 = M \cap \mathfrak{P}$, $M_2 = M \cap \mathfrak{L}$. Легко видеть, что M_1 и M_2 — максимальные идеалы соответственно алгебр $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{L}$ и что $M = M_1 \dotplus M_2$. Если $M_2 = \mathfrak{L}_0$, то идеал M имеет второй из указанных видов.

Пусть $M_2 \neq \mathfrak{L}_0$. Тогда, как известно, M_2 совпадает с множеством всех функций из $\mathfrak{L}$, обращающихся в нуль в некоторой вещественной точке λ_0.

Покажем, что M_1 совпадает с множеством всех функций из $\mathfrak{P}$, обращающихся в нуль в этой же точке λ_0. Допустим, что это не так и пусть $a(\lambda)$ и $\mathscr{K}(\lambda)$ — такие функции из M_1 и $\mathfrak{L}_0$ соответственно, что $a(\lambda_0)\neq 0$ и $\mathscr{K}(\lambda_0)\neq 0$. Функция $a(\lambda)\mathscr{K}(\lambda)\in M\cap\mathfrak{L}_0\subset M_2$, так как M и $\mathfrak{L}_0$ являются идеалами алгебры $\mathfrak{A}$. Но это противоречит тому, что $a(\lambda_0)\mathscr{K}(\lambda_0)\neq 0$.

Если $\mathfrak{B}$ — некоторая банахова алгебра функций, заданных на вещественной оси, то через $M_\lambda(\mathfrak{B})$ $(-\infty<\lambda<\infty)$ обозначим множество всех функций из $\mathfrak{L}$, обращающихся в нуль в точке λ. Через $\mathfrak{M}(\mathfrak{B})$ обозначим бикомпакт максимальных идеалов алгебры $\mathfrak{B}$.

Теорема 3.2. *Совокупность всех максимальных идеалов* $M_\lambda(\mathfrak{A})$ $(-\infty<\lambda<\infty)$ *плотна в бикомпакте* $\mathfrak{M}(\mathfrak{A})$.

Доказательство. Пусть M_0 — произвольный идеал вида $M_0 = M_{\mathfrak{P}}\dot{+}\mathfrak{L}_0$, где $M_{\mathfrak{P}}$ — некоторый максимальный идеал алгебры $\mathfrak{P}$. Рассмотрим окрестность идеала M_0, состоящую из всех идеалов $M\in\mathfrak{M}(\mathfrak{A})$, для которых

$$(3.11)\qquad |\mathscr{A}_j(M)-\mathscr{A}_j(M_0)|<\varepsilon \qquad (j=1,2,\cdots,n),$$

где $\varepsilon>0$ и $\mathscr{A}_j$ — некоторые элементы из $\mathfrak{A}$:

$$\mathscr{A}_j(\lambda) = a_j(\lambda)+\mathscr{K}_j(\lambda)\ \left(a_j(\lambda)\in\mathfrak{P},\ \mathscr{K}_j(\lambda)\in\mathfrak{L}_0\right).$$

Покажем, что в этой окрестности содержится хотя бы один идеал типа $M_\lambda(\mathfrak{A})$.

Как известно (см. [1]) множество идеалов $M_\lambda(\mathfrak{P})$ $(-\infty<\lambda<\infty)$ плотно в $\mathfrak{M}(\mathfrak{P})$, следовательно, существует точка λ_1, такая, что

$$(3.12)\qquad |a_j(\lambda_1)-a_j(M_{\mathfrak{P}})|<\varepsilon/3 \qquad (j=1,2,\cdots,n).$$

Пусть δ — настолько большое положительное число, что $|\mathscr{K}_j(\lambda)|<\varepsilon/3$ при $\lambda>\delta$. Из свойств почти периодических функций следует существование точки λ_0 с $|\lambda_0|>\delta$ такой, что

$$(3.13)\qquad |a_j(\lambda_0)-a_j(\lambda_1)|<\varepsilon/3 \qquad (j=1,2,\ldots,n).$$

Идеал $M_{\lambda_0}(\mathfrak{A})$ принадлежит окресности (3.11). В самом деле, $\mathscr{K}_j(M_0)=0$ ибо $\mathscr{K}_j\in\mathfrak{L}_0\subset M_0$, а $\mathscr{K}_j(M_{\lambda_0}(\mathfrak{A}))=\mathscr{K}_j(\lambda_0)$ и $a_j(M_{\lambda_0}(\mathfrak{A}))=a_j(\lambda_0)$. Следовательно,

$$|\mathscr{A}_j(M_{\lambda_0}(\mathfrak{A}))-\mathscr{A}_j(M_0)| = |a_j(\lambda_0)+\mathscr{K}_j(\lambda_0)-a_j(M_0)| \leqq$$
$$\leqq |a_j(\lambda_0)-a_j(M_0)|+\varepsilon/3 \qquad (j=1,2,\cdots,n).$$

Учитывая, соотношения (3.12) и (3.13) и равенство $a_j(M_0)=a_j(M_{\mathfrak{P}})$ получаем

$$|\mathscr{A}_j(M_{\lambda_0}(\mathfrak{A}))-\mathscr{A}_j(M_0)|<\varepsilon \qquad (j=1,2,\cdots,n).$$

Теорема доказана.

4. *Алгебра $\mathfrak{A}_p$ и её максимальные идеалы.* На линейном множестве функций $\mathfrak{A}_p$ введём норму, полагая

$$\|\mathscr{A}(\lambda)\|_p = \|A\|_p. \tag{3.14}$$

Из леммы 3. 2 следует, что если функции $\mathscr{A}_1(\lambda)$, $\mathscr{A}_2(\lambda) \in \mathfrak{A}_p$, то функция $\mathscr{A}(\lambda) = \mathscr{A}_1(\lambda)\mathscr{A}_2(\lambda)$ также принадлежит $\mathscr{A}_p$, причем

$$\|\mathscr{A}_1(\lambda)\mathscr{A}_2(\lambda)\|_p \leqq \|\mathscr{A}_1(\lambda)\|_p \|\mathscr{A}_2(\lambda)\|_p.$$

Таким образом, $\mathfrak{A}_p$ $(1 \leqq p \leqq \infty)$ является коммутативной банаховой алгеброй. В силу леммы 3. 3 $\mathfrak{A}_p$ является алгеброй с симметричной инволюцией.

Из соотношений (3. 3) вытекает, что $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}$, а $\mathfrak{A}_2$ представляет собой алгебру всех функций $\mathscr{A}(\lambda)$ вида $\mathscr{A}(\lambda) = a(\lambda) + \mathscr{K}(\lambda)$, где $a(\lambda)$ — любая почти-периодическая функция, а $\mathscr{K}(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ — любая непрерывная функция, обращающаяся в нуль на бесконечности, с нормой

$$\|\mathscr{A}(\lambda)\|_2 = \sup_{-\infty<\lambda<\infty} |\mathscr{A}(\lambda)|.$$

Нам понадобятся два простых предложения о банаховых алгебрах.

1^0. *Пусть $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_2$ — коммутативные банаховы алгебры и $\mathfrak{B}_1$ плотно вложена*) в $\mathfrak{B}_2$. Тогда бикомпакт $\mathfrak{M}(\mathfrak{B}_2)$ гомеоморфен замкнутому подмножеству $\mathfrak{M}(\mathfrak{B}_1)$.*

В самом деле, каждому максимальному идеалу $M_2 \in \mathfrak{M}(\mathfrak{B}_2)$ естественным образом ставится в соответствие максимальный идеал $M_1 \in \mathfrak{M}(\mathfrak{B}_1)$, определенный равенством $M_1 = M_2 \cap \mathfrak{B}_1$. Обозначим через $\mathfrak{N}$ множество максимальных идеалов из $\mathfrak{M}(\mathfrak{B}_1)$ получаемых при таком соответствии, т. е. $\mathfrak{N}$ — множество всех максимальных идеалов из $\mathfrak{M}(\mathfrak{B}_1)$, которые допускают расширение (единственным образом) до максимальных идеалов из $\mathfrak{M}(\mathfrak{B}_2)$.

Покажем, что при этом соответствии отображение $\mathfrak{M}(\mathfrak{B}_2)$ на $\mathfrak{N}$ непрерывно. Пусть идеал $M_0 \in \mathfrak{N}$, $U = \{M \in \mathfrak{N}: |x_j(M) - x_j|\ (M_0) < \varepsilon;\ x_j \in \mathfrak{B}_1,\ j = 1, 2, \dots, n\}$ — его окрестность, и $\tilde{M}_0 \in \mathfrak{M}(\mathfrak{B}_2)$ — расширение M_0. Тогда окрестность $V = \{\tilde{M} \in \mathfrak{M}(\mathfrak{B}_2): |x_j(\tilde{M}) - x_j(\tilde{M}_0)| < \varepsilon\}$ отображается на U. Таким образом $\mathfrak{N}$ замкнуто и, следовательно, множества $\mathfrak{M}(\mathfrak{B}_2)$ и $\mathfrak{N}$ гомеоморфны.

2^0. *Пусть коммутативные банаховы алгебры $\mathfrak{B}_j$ $(j = 1, 2, 3)$ последовательно плотно вложены: $\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}_2 \subset \mathfrak{B}_3$. Если всякий максимальный идеал алгебры $\mathfrak{B}_1$ расширяется до максимального идеала алгебры $\mathfrak{B}_3$ то это справедливо и для пары $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_3$.*

---

*) Говорят, что алгебра $\mathfrak{B}_1$ плотно вложена в алгебру, $\mathfrak{B}_2$ если $\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}_2$, $\overline{\mathfrak{B}}_1 = \mathfrak{B}_2$ и существует такая константа $c > 0$, что для любого $x \in \mathfrak{B}_1$: $\|x\|_2 \leqq c\|x\|_1$.

Действительно, пусть $M_2 \in \mathfrak{M}(\mathfrak{B}_2)$ и $M_1 = M_2 \cap \mathfrak{B}_1$. Тогда $M_1 \in \mathfrak{M}(\mathfrak{B}_1)$, и, следовательно, идеал M_1 содержится в некотором идеале $M_3 \in \mathfrak{M}(\mathfrak{B}_3)$. Замыкание идеала M_1 по норме $\mathfrak{B}_3$, и тем более по норме $\mathfrak{B}_2$, содержится в M_3. Но замыкание M_1 по норме $\mathfrak{B}_2$ равно M_2 (см. [5], лемма 2. 1).

Теорема 3. 3. *Бикомпакты $\mathfrak{M}(\mathfrak{A})$ и $\mathfrak{M}(\mathfrak{A}_2)$ гомеоморфны. Иными словами, всякий максимальный идеал алгебры $\mathfrak{A}$ расширяется (единственным образом) до максимального идеала алгебры $\mathfrak{A}_2$.*

Доказательство. Действительно, в силу предложения 1^0 бикомпакт $\mathfrak{M}(\mathfrak{A}_2)$ гомеоморфен замкнутому множеству $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}(\mathfrak{A})$, состоящему из всех максимальных идеалов алгебры $\mathfrak{A}$, которые допускают расширения до максимальных идеалов алгебры $\mathfrak{A}_2$. Все максимальные идеалы $M_\lambda(\mathfrak{A})\,(-\infty < \lambda < \infty)$ очевидно, принадлежат $\mathfrak{N}$. Так как множество всех идеалов $M_\lambda(\mathfrak{A})$ в силу теоремы 3. 2 плотно в $\mathfrak{M}(\mathfrak{A})$, то $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}(\mathfrak{A})$.

Теорема 3. 4. *Пусть M — некоторый максимальный идеал алгебры $\mathfrak{A}_2$. Тогда $\hat{M} = M \cap \mathfrak{A}_p$ является максимальным идеалом алгебры $\mathfrak{A}_p$. Идеалами указанного вида исчерпываются все максимальные идеалы алгебры $\mathfrak{A}_p$.*

Эта теорема является непосредственным следствием предложения 2^0.

Теорема 3. 5. *Для того чтобы элемент $\mathscr{A}(\lambda) \in \mathfrak{A}_p$ был обратим, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\inf_{-\infty<\lambda<\infty} |\mathscr{A}(\lambda)| > 0 \tag{3.15}$$

Необходимость условия (3. 15) очевидна. Покажем его достаточность. Пусть для элемента $\mathscr{A}(\lambda) = a(\lambda) + \mathscr{K}(\lambda) \in \mathfrak{A}_p$ ($a(\lambda)$ — почти-периодическая функция, $\mathscr{K}(\lambda)$ — непрерывная функция, равная нулю на бесконечности) выполнено условие (3. 15), тогда

$$\inf_{-\infty<\lambda<\infty} |a(\lambda)| \geqq \inf_{-\infty<\lambda<\infty} |\mathscr{A}(\lambda)| > 0$$

и, следовательно, элемент $\mathscr{A}(\lambda)$ обратим в алгебре $\mathfrak{A}_2$. В силу теоремы 3. 4 он обратим и в $\mathfrak{A}_p$.

5. *Основная теорема.* Определения индексов $\nu(\mathscr{W})$ и $n(\mathscr{W})$ для невырожденных функций $\mathscr{W}(\lambda) \in \mathfrak{A}$, очевидно, сохраняют смысл для проивольной невырожденной функции $\mathscr{A}(\lambda) \in \mathfrak{A}_2$. При этом индексы $\nu(\mathscr{A})$ и $n(\mathscr{A})$ сохраняют свойство устойчивости, т. е. при малых (по норме алгебры $\mathfrak{A}_2$) возмущениях невырожденной функции $\mathscr{A}(\lambda) \in \mathfrak{A}_2$ её индексы не изменяются.

Отметим еще, что также как в алгебре $\mathfrak{A}$, соответствие между операторами из $\hat{\mathfrak{A}}_p$ и их символами частично мультипликативно в следующем смысле.

Пусть $A_1 \in \hat{\mathfrak{A}}_p$ и $A_\pm$ принадлежит замыканию (по норме $\hat{\mathfrak{A}}_p$) $\hat{\mathfrak{A}}_p \cap \hat{\mathfrak{A}}_\pm$. Тогда оператор $A = A_- A_1 A_+ \in \hat{\mathfrak{A}}_p$ и его символ $\mathscr{A}(\lambda)$ равен произведению $\mathscr{A}_-(\lambda)\mathscr{A}_1(\lambda)\mathscr{A}_+(\lambda)$.

Теорема 3. 6. *Для того чтобы оператор $A \in \hat{\mathfrak{A}}_p$ был обратим в пространстве L_p хотя бы с одной стороны, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* (3. 15).

Если это условие выполнено, то при $\nu(\mathscr{A}) > 0$ оператор A обратим только слева, при $\nu(\mathscr{A}) < 0$ он обратим только справа, а при $\nu(\mathscr{A}) = 0$ оператор A обратим, обратим только слева, обратим только справа в зависимости от того, будет ли индекс $n(\mathscr{A})$ равным нулю, положительным, отрицательным.

Если условие (3. 15) *не выполнено, то A не является ни Φ_+-ни Φ_--оператором.*

Доказательство. Пусть оператор $A \in \hat{\mathfrak{A}}_p$ и его символ удовлетворяет условию (3. 15). Тогда в силу теоремы 3. 5 функция $\mathscr{A}^{-1}(\lambda) \in \mathfrak{A}_p$. Можно найти такую невырожденную функцию $\mathscr{W}(\lambda) \in \mathfrak{A}$, что функция $\mathscr{A}(\lambda)$ представима в виде

$$\mathscr{A}(\lambda) = \mathscr{W}(\lambda)\left(1 + \mathscr{B}(\lambda)\right), \tag{3.16}$$

где $\mathscr{B}(\lambda) \in \mathfrak{A}_p$ и имеет достаточно малую норму в $\mathfrak{A}_p$. Легко видеть, что имеют место равенства $\nu(\mathscr{W}) = \nu(\mathscr{A})$ и $n(\mathscr{W}) = n(\mathscr{A})$. Согласно теореме 1. 1 функция $\mathscr{W}(\lambda)$ допускает факторизацию

$$\mathscr{W}(\lambda) = \mathscr{W}_-(\lambda) e^{i\nu\lambda} \left(\frac{\lambda - i}{\lambda + i}\right)^n \mathscr{W}_+(\lambda) \qquad (-\infty < \lambda < \infty), \tag{3.17}$$

где

$$\mathscr{W}_\pm(\lambda), \quad \mathscr{W}_\pm^{-1}(\lambda) \in \mathfrak{A}_\pm, \quad \nu = \nu(\mathscr{A}), \quad n = n(\mathscr{A}).$$

Из равенств (3. 16) и (3. 17) следует, что оператор A допускает следующее представление в зависимости от знаков индексов ν и n:

1. $A = W_- U_\nu V^{(n)} (I + B) W_+$ при $\nu \leqq 0$, $n \leqq 0$;
2. $A = W_- U_\nu (I + B) V^{(n)} W_+$ при $\nu < 0$, $n > 0$;
3. $A = W_- V^{(n)} (I + B) U_\nu W_+$ при $\nu > 0$, $n < 0$;
4. $A = W_- (I + B) U_\nu V^{(n)} W_+$ при $\nu \geqq 0$, $n \geqq 0$,

где $W_\pm$ и B — операторы с символами $\mathscr{W}_\pm(\lambda)$ и $\mathscr{B}(\lambda)$ соответственно.

Так как $\|B\|_p < 1$, то оператор $I + B$ обратим, и поэтому в первом случае оператор

$$A^{(-1)} = W_+^{-1} (I + B)^{-1} V^{(-n)} U_{-\nu} W_-^{-1}$$

является обратным справа к A, а в последнем случае оператор

$$A^{(-1)} = W_+^{-1} V^{(-n)} U_{-\nu} (I+B)^{-1} W_-^{-1}$$

является обратным слева к A.

В доказательстве теоремы 2. 1 показано, в частности, что оператор $U_\nu V^{(n)}$ $(\nu<0,\ n>0)$ обратим справа, а оператор $V^{(n)}U_\nu$ $(\nu>0,\ n<0)$ обратим слева. Так как операторы $U_\nu B V^{(n)}$ и $V^{(n)} B U_\nu$ имеют достаточно малую норму, то оператор $U_\nu(I+B)V^{(n)} = U_\nu V^{(n)} + U_\nu B V^{(n)}$, при $\nu<0$ и $n>0$, обратим справа, а оператор $V^{(n)}(I+B)U_\nu = V^{(n)}U_\nu + V^{(n)}BU_\nu$ при $\nu>0$, и $n<0$ обратим слева. Отсюда уже непосредственно вытекает, что в случае 2) оператор A обратим справа, а в случае 3) он обратим слева.

С помощью соображений из доказательства теоремы 2. 1 легко вывести, что при $\nu<0$

$$\dim \ker A = \infty,$$

при $\nu>0$

$$\dim \operatorname{coker} A = \infty,$$

и при $\nu=0$

$$\dim \ker A = -n, \qquad \text{если } n<0$$

и

$$\dim \operatorname{coker} A = n, \qquad \text{если } n>0.$$

Последнее утверждение теоремы доказывается также как соответствующее предложение в теореме 2. 4.

Теорема доказана.

§ 4. Парные интегрально-разностные уравнения и транспонированные к ним

В настоящем параграфе рассматриваются следующие два типа уравнений:

$$(4.1)\qquad \begin{aligned} &\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j^{(1)} \varphi(t-\alpha_j) + \int_{-\infty}^{\infty} k_1(t-s)\varphi(s)\,ds = f(t) \qquad (0<t<\infty),\\ &\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j^{(2)} \varphi(t-\beta_j) + \int_{-\infty}^{\infty} k_2(t-s)\varphi(s)\,ds = f(t) \qquad (-\infty<t<0) \end{aligned}$$

и

$$(4.2)\qquad \begin{aligned} &\sum_{\alpha_j<t} a_j^{(1)} \varphi(t-\alpha_j) + \sum_{\beta_j>t} a_j^{(2)} \varphi(t-\beta_j) + \\ &+\int_0^{\infty} k_1(t-s)\varphi(s)\,ds + \int_{-\infty}^{0} k_2(t-s)\varphi(s)\,ds = f(t) \qquad (-\infty<t<\infty). \end{aligned}$$

Эти уравнения будут рассмотрены в пространстве $L_p\,(-\infty, \infty)$ $(1 \leqq p \leqq \infty)$ для случая, когда соответствующие символы $\mathscr{W}_1(\lambda) = a^{(1)}(\lambda) + \mathscr{K}_1(\lambda)$ и $W_2(\lambda) =$

$= a^{(2)}(\lambda) + \mathscr{K}_2(\lambda)$ принадлежат алгебре $\mathfrak{A}$, а также, по аналогии с § 3, в более общем случае. Если $\mathscr{W}_1(\lambda)$ и $\mathscr{W}_2(\lambda) \in \mathfrak{A}$, то уравнения (4. 1) и (4. 2) могут быть переписаны в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(s)\, d\omega_1(t-s) = f(t) \qquad (0 < t < \infty), \tag{4.3}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(s)\, d\omega_2(t-s) = f(t) \qquad (-\infty < t < 0)$$

и

$$\int_{0}^{\infty} \varphi(s)\, d\omega_1(t-s) + \int_{-\infty}^{0} \varphi(s)\, d\omega_2(t-s) = f(t) \qquad (-\infty < t < \infty), \tag{4.4}$$

где $\omega_1(t)$ и $\omega_2(t)$ — функции ограниченной вариации без сингулярной компоненты.

1. *Алгебра операторов* $\tilde{\mathfrak{A}}_p$. Обозначим через $\tilde{\mathfrak{A}} (= \tilde{\mathfrak{A}}_1)$ множество всех операторов $\tilde{W}$, действующих в $L_p\ (-\infty, \infty)$ $(1 \leqq p \leqq \infty)$ по формуле

$$(\tilde{W}\varphi)(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \varphi(t-\delta_j) + \int_{-\infty}^{\infty} k(t-s)\varphi(s)\, ds, \tag{4.5}$$

где

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j| < \infty \quad \text{и} \quad k(t) \in L_1(-\infty, \infty).$$

Очевидно,

$$\|\tilde{W}\|_p \leqq \sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j| + \int_{-\infty}^{\infty} |k(t)|\, dt. \tag{4.6}$$

Также как для операторов из $\hat{\mathfrak{A}}$ доказывается, что в случае $p=1$ в (4. 6) достигается знак равенства.

Множество $\tilde{\mathfrak{A}}$ (в отличие от $\hat{\mathfrak{A}}$) является банаховой коммутативный алгеброй с нормой $\|\tilde{W}\|_1$.

Аналогично предыдущим параграфам, через $\tilde{\mathfrak{A}}_p$ $(1 \leqq p \leqq \infty)$ обозначим замыкание (по норме пространства $L_p\ (-\infty, \infty)$) алгебры $\tilde{\mathfrak{A}}$.

Лемма 4. 1. *Для любого оператора* $\tilde{W} \in \tilde{\mathfrak{A}}$ *имеет место равенство*

$$\|\tilde{W}\|_p = \|W\|_p,$$

где через W *обозначен соответствующий оператор из* $\hat{\mathfrak{A}}$.

Доказательство. В самом деле, легко видеть, что

$$\|W\|_p \leqq \|\tilde{W}\|_p \qquad (1 \leqq p \leqq \infty).$$

Обратное неравенство докажем для случая, когда только конечное число чисел a_j (из равенства (4. 5), определяющего оператор $\tilde{W}$) отличны от нуля, а ядро $k(t)$ — финитно (т. е. обращается в нуль вне некоторого конечного промежутка). Очевидно, это предположение не уменьшает общности рассуждений.

Через $\varphi_n(t)$ $(n=1, 2, \ldots)$ обозначим последовательность финитных функций из пространства $L_p(-\infty, \infty)$ $(\|\varphi_n\|_p=1)$, для которой

$$\lim_{n\to\infty} \|\tilde{W}\varphi_n\|_p = \|\tilde{W}\|_p.$$

Подберем положительные числа ν_n $(n=1, 2, \ldots)$ настолько большими, чтобы функции $\psi_n(t) = \varphi_n(t-\nu_n)$ обращались в нуль на отрицательной полуоси и имело место равенство

$$(\tilde{W}\psi_n)(t) = \begin{cases} (W\psi_n)(t), & t\geqq 0 \\ 0 & t<0 \end{cases}.$$

Обозначим через χ_n функции $\tilde{W}\psi_n$ $(n=1, 2, \ldots)$. Тогда будем иметь

$$\chi_n(t+\nu_n) = (\tilde{W}\varphi_n)(t)$$

и, следовательно,

$$\|\chi_n(t)\|_p = \|\tilde{W}\varphi_n\|_p,$$

откуда вытекает

$$\lim_{n\to\infty} \|\chi_n(t)\|_p = \|\tilde{W}\|_p.$$

С другой стороны,

$$\|\chi_n\|_p = \|\tilde{W}\psi_n\|_p = \|W\psi_n\|_p.$$

Стало быть,

$$\lim_{n\to\infty} \|W\psi_n\|_p = \|\tilde{W}\|_p.$$

Учитывая, что $\|\psi_n\|_p=1$, получаем

$$\|W\|_p \geqq \|\tilde{W}\|_p,$$

чем и завершается доказательство леммы.

Из доказанной леммы вытекает, что банаховы пространства $\tilde{\mathfrak{A}}_p$ и $\tilde{\mathfrak{A}}_p$ изоморфны и изометричны. Отсюда также вытекает изоморфизм и изометрия коммутативных банаховых алгебр $\tilde{\mathfrak{A}}_p$ и $\mathfrak{A}_p$. Этот изоморфизм сопоставляет каждому оператору $A\in\tilde{\mathfrak{A}}_p$ функцию $\mathscr{A}(\lambda)\in\mathfrak{A}_p$, которую естественно назвать **символом** оператора A.

Обозначим через $\tilde{\mathfrak{A}}_+(\tilde{\mathfrak{A}}_-)$ подалгебру алгебры $\tilde{\mathfrak{A}}$, состоящую из всех операторов $\tilde{W}_+$ $(\tilde{W}_-\in\tilde{\mathfrak{A}})$ с символами $\mathscr{W}_+(\lambda)$ из $\mathfrak{A}_+(\mathscr{W}_-(\lambda)$ из $\mathfrak{A}_-)$. Через $\tilde{\mathfrak{A}}_p^+$ $(\tilde{\mathfrak{A}}_p^-)$ обозначим подалгебру $\tilde{\mathfrak{A}}_p$, являющуюся замыканием (по норме $\tilde{\mathfrak{A}}_p$) алгебры $\tilde{\mathfrak{A}}_+(\tilde{\mathfrak{A}}_-)$.

Пусть P — проектор, определенный в пространстве $L_p(-\infty, \infty)$ равенством

$$(P\varphi)(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t>0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$$

и Q — дополнительный проектор: $Q = I - P$.

Легко видеть, что имеют место равенства

(4.7) $$A_+P = PA_+P, \qquad A_-Q = QA_-Q$$

для любых операторов $A_\pm \in \tilde{\mathfrak{A}}_p^\pm$.

Парное уравнение (4.1), очевидно, можно записать в виде

$$PW_1\varphi + QW_2\varphi = f,$$

где W_j $(j=1, 2)$ — операторы из алгебры $\tilde{\mathfrak{A}}$, определенные символами $\mathscr{W}_j(\lambda) = a^{(j)}(\lambda) + \mathscr{K}_j(\lambda)$ $(j=1, 2)$. Уравнение (4.2) можно записать в виде

$$W_1P\varphi + W_2Q\varphi = f.$$

В этом параграфе будут рассматриваться в $L_p(-\infty, \infty)$ операторы вида $PA_1 + QA_2$ или $A_1P + A_2Q$, где $A_1, A_2 \in \tilde{\mathfrak{A}}_p$ $(1 \leq p \leq \infty)$.

Существенными для дальнейшего являются следующие равенства

(4.8) $$(A_1P + A_2Q)(A_+P + A_-Q) = A_1A_\pm P + A_2A_-Q$$

и

(4.9) $$(PA_- + QA_+)(PA_1 + QA_2) = PA_-A_1 + QA_+A_2,$$

которые справедливы для любых операторов $A_1, A_2 \in \tilde{\mathfrak{A}}_p$ и $A_\pm \in \tilde{\mathfrak{A}}_p^\pm$.

2. *Основная теорема.*

Теорема 4.1. *Пусть операторы $A_1, A_2 \in \tilde{\mathfrak{A}}_p$. Для чтобы оператор $A_1P + A_2Q$ $(PA_1 + QA_2)$ был обратим хотя бы с одной стороны, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия*

(4.10) $$\inf_{-\infty<\lambda<\infty} |\mathscr{A}_j(\lambda)| > 0 \qquad (j=1, 2).$$

Пусть эти условия выполнены и числа ν, n являются индексами функции $\mathscr{A}_1(\lambda)/\mathscr{A}_2(\lambda)$. Тогда при $\nu>0$ оператор $A_1P + A_2Q (PA_1 + QA_2)$ обратим только слева, при $\nu<0$ он обратим только справа, а при $\nu=0$ он обратим, обратим только справа, обратим только слева в зависимости от того, будет ли число n равным нулю, отрицательным, положительным.

Доказательство. Пусть выполнены условия (4. 10). Тогда оператор A_1P+A_2Q можно представить в виде

$$A_1P+A_2Q = A_2(CP+Q),$$

где $C\in\tilde{\mathfrak{A}}_p$ — оператор с символом $\mathscr{A}_1(\lambda)/\mathscr{A}_2(\lambda)$.

Так как оператор A_2 обратим, то остаётся исследовать оператор $CP+Q$, который в свою очередь можно представить в виде $CP+Q = (PCP+Q)(I+ +QCP)$.

Оператор $I+QCP$ обратим и $(I+QCP)^{-1} = I-QCP$.)

Из теоремы 3. 6 непосредственно вытекает, что оператор $PCP+Q$ обратим только слева при $\nu>0$, только справа при $\nu<0$, и при $\nu=0$ он обратил только справа, только слева или с двух сторон в зависимости от знака индекса n.

Перейдем к доказательству необходимости условий теоремы. Предположим, что оператор A_1P+A_2Q обратим с какой либо стороны. Так же как в доказательстве теоремы 2. 4 можно в дальнейшем ограничиться рассмотрением случая, когда символы $\mathscr{A}_1(\lambda)$ и $\mathscr{A}_2(\lambda)$ имеют вид

$$\mathscr{A}_j(\lambda) = \sum_{m=1}^{n} a_m^{(j)} e^{i\delta_m\lambda}+\int_a^b k_j(t)e^{i\lambda t}\,dt \qquad (k_j(t)\in L_1, \quad j = 1, 2).$$

Пусть k — настолько большое натуральное число, что $\tilde{U}^kA_1\in\tilde{\mathfrak{A}}_+$ и $\tilde{U}^{-k}A_2\in\tilde{\mathfrak{A}}_-$, где $\tilde{U}\,(\in\tilde{\mathfrak{A}})$ — оператор с символом $e^{i\lambda}$. Тогда в силу (4. 8) имеют место равенства

$$A_1P+A_2Q = \tilde{U}^{-k}(P+\tilde{U}^kA_2Q)(\tilde{U}^kA_1P+Q),$$

(4. 11)

$$A_1P+A_2Q = \tilde{U}^k(\tilde{U}^{-k}A_1P+Q)(P+\tilde{U}^{-k}A_2Q).$$

Пусть, например, оператор A_1P+A_2Q обратим справа. Тогда в силу равенств (4. 11) операторы $P+\tilde{U}^kA_2Q$ и $\tilde{U}^{-k}A_1P+Q$ обратимы справа. Из равенств

$$P+\tilde{U}^kA_2Q = (P+Q\tilde{U}^kA_2Q)(I+P\tilde{U}^kA_2Q),$$

$$\tilde{U}^{-k}A_1P+Q = (P\tilde{U}^{-k}A_1P+Q)(I+Q\tilde{U}^{-k}A_1P)$$

следует обратимость справа операторов $P+Q\tilde{U}^{-k}A_2Q$ и $P\tilde{U}^{-k}A_1P+Q$. Применяя теорему 3. 6, получим, что выполнены условия (4. 10).

Аналогичным образом доказывается теорема для оператора PA_1+QA_2.

Замечание. Если хотя бы одно из условий (4. 10) не выполнено, то легко показать, что оператор $A_1P+A_2Q(PA_1+QA_2)$ не является ни Φ_+- ни Φ_--оператором.

Отметим, что также как в параграфе 2 при условии $A_1, A_2 \in \tilde{\mathfrak{A}}$ можно описать нули оператора $A_1P + A_2Q(PA_1 + QA_2)$ и его множество значений. Однако на этом мы не будем останавливаться.

В заключение отметим, что хотя все рассмотрения в статье велись в пространствах L_p, их можно без труда распространить на значительно более широкий класс пространств.

3. *Связь с граничной задачей.* Полученные выше результаты можно интерпретировать как результаты о граничной задаче теории функций с коэффициентами, имеющими на бесконечности точку разрыва второго рода. Поясним это подробнее. Обозначим через $\mathfrak{F}_p^+(\mathfrak{F}_p^-)$ совокупность всех преобразований Фурье функций из L_p $(0, \infty)$ $(L_p(-\infty, 0)$. Как известно, функции из $\mathfrak{F}_p^+(\mathfrak{F}_p^-)$ допускают голоморфные продолжения в верхнюю (нижнюю) полуплоскость. Рассмотренные в §§ 3, 4 уравнения, очевидно, эквивалентны следующим граничным задачам

$$\mathscr{A}(\lambda)\Phi_+(\lambda) - \Phi_-(\lambda) = F_+(\lambda) \qquad (-\infty < \lambda < \infty),$$

$$\mathscr{A}_1(\lambda)\Phi_+(\lambda) + \mathscr{A}_2(\lambda)\Phi_-(\lambda) = F(\lambda) \qquad (-\infty < \lambda < \infty),$$

$$[\mathscr{A}_1(\lambda)\Phi(\lambda)]_+ + [\mathscr{A}_2(\lambda)\Phi(\lambda)]_- = F(\lambda) \qquad (-\infty < \lambda < \infty),$$

где $\mathscr{A}(\lambda), \mathscr{A}_1(\lambda), \mathscr{A}_2(\lambda) \in \mathfrak{A}_p$; $F_+(\lambda), \Phi_+(\lambda) \in \mathfrak{F}_p^+$, $\Phi_-(\lambda) \in \mathfrak{F}_p^-$, $F(\lambda)$ —преобразование Фурье функции $f(t) \in L_p$ $(-\infty, \infty)$, а $[F(\lambda)]_\pm$ определяются равенствами

$$[F(\lambda)]_+ = \int_0^\infty f(t)^{i\lambda t}\,dt, \quad [F(\lambda)]_- = \int_{-\infty}^0 f(t)e^{i\lambda t}\,dt.$$

Коэффициенты $\mathscr{A}(\lambda)$, $\mathscr{A}_1(\lambda)$, $\mathscr{A}_2(\lambda)$, имеют на бесконечности точку разрыва второго рода, однако специального вида.

Цитированная литература

[1] И. М. Гельфанд, Д. А. Райков, Г. Е. Шилов, *Коммутативные нормированные кольца* (Москва, 1960).

[2] М. Г. Крейн, Интегральные уравнения по полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов, *Усп. матем. наук.*, **13: 5** (1958), 3—120.

[3] Б. М. Левитан, *Почти-периодические функции* (Москва, 1953).

[4] И. Ц. Гохберг, И. А. Фельдман, *Проекционные методы решения уравнений Винера—Хопфа,* (Кишинев, 1967).

[5] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов, *Усп. матем. наук,* **12: 2** (1957), 44—118.

[6] B. Yood, Properties of linear transformations preserved under addition of a completely continuous transformation, *Duke Math. J.*, **18** (1951), 599—612.

[7] И. Ц. Гохберг, Задача факторизации в нормированных кольцах, функции от изометрических операторов и сингулярные интегральные уравнения, *Усп. матем. наук,* **19:1** (1964), 71—124.

(Поступило 16/VII/1968)